



PROGRAM

Temat: Statystyka elementarna i podstawy statystyki matematycznej.

Skale pomiarowe, miary tendencji centralnej i rozproszenia. Rozkłady zmiennej losowej, posługiwanie się tablicami statystycznymi.

Temat: Testy statystyczne.

Sposoby formułowania hipotezy zerowej. Rodzaje testów statystycznych. Badanie spełnienia warunków stosowalności testów. Planowanie doświadczeń pod kątem możliwości statystycznej analizy wyników.

Temat: Wybór testu statystycznego.

Podjmowanie decyzji przy wyborze testu statystycznego, tabele decyzyjne.

Temat: Testy dla jednej próby.

Hipotezy o średniej, medianie, rozkładzie danych w populacji – testy na normalność rozkładu.

Temat: Analiza błędów pomiarowych.

Wielkości i pomiary, błędy pomiarowe, niepewność pomiarowa, zaokrąglanie wyników, przedział ufności.

Temat: Testy dla dwóch prób.

Próby zależne i niezależne. Hipotezy o różnicy pomiędzy średnimi, niezależności wariancji, zgodności rozkładów.

Temat: Testy dla większej liczby prób.

ANOVA i warunki stosowalności, dodatkowe testy a posteriori, nieparametryczna analiza wariancji, porównanie stosowanych metod.

Temat: Korelacja i regresja.

Testy miar korelacji i regresji. Analiza istotności statystycznej metody najmniejszych kwadratów. Testy oparte na skali porządkowej.

Do przypomnienia – pierwszy temat, definicje i wzory do obliczeń

- skale pomiarowe,
- statystyki i parametry
- średnie,
- mediana i moda,
- suma kwadratów odchyłeń,
- wariancja,
- odchylenie standardowe.

Statystyki i parametry.

Wielkości obliczane dla pobranej próby – statystyki, __
oznaczane literami łacińskimi, np. średnia z próby $\bar{X}$.

Wielkości obliczane dla całej populacji – parametry,
oznaczane literami greckimi, np. średnia z populacji μ .

Statystyka elementarna – obliczanie statystyk.

Statystyka matematyczna –
wnioskowanie o populacji generalnej na podstawie próby.

Skale: nominalna, porządkowa i interwałowa.

Skala **nominalna**:

- podział populacji na jednoznacznie opisane kategorie
- kryteria podziału.

Skala nominalna dychotomiczna – jw. ale tylko dwa podzbiory.

Skala **porządkowa**

- elementy zbioru porządkujemy według jednej reguły,
- każdy element ma przypisaną kolejność (**range**).

Skala **interwałowa**

- wszystkie pomiary uzyskane przez porównanie ze wzorcem:
długość, objętość, masa, temperatura, czas i inne,
- dane pochodzące z policzenia:
liczba drzew danego gatunku, **liczba** studentów noszących
okulary.

Skala interwałowa:

- skala przedziałowa
 - ~ liczby rzeczywiste
 - ~ istotne są różnice między elementami zbioru
 - ~ np. kalendarz, temperatura w °C
- skala ilorazowa
 - ~ j.w.
 - ~ zero bezwzględne
 - ~ stały stosunek (niezależny od jednostek)
 - ~ temperatura w K, masa, odległość

Skala nominalna i porządkowa – cechy jakościowe

Skala interwałowa – cechy ilościowe

Zamiana skal: interwałowa → porządkowa → nominalna

Zamiana w przeciwną stronę jest niemożliwa, mamy za mało danych.
Najdokładniejsza jest skala interwałowa a najmniej skala nominalna.

STATYSTYKA ELEMENTARNA **miary tendencji centralnej i rozproszenia**

Liczba pomiarów N – $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_N$

Suma (konwencje) - $\sum_{i=1}^N X_i \quad \sum_{i=1}^N X_i \quad \sum X$

Średnia arytmetyczna - $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X$

Średnia ważona $\bar{X}_w = \frac{\sum w_i \cdot X_i}{\sum w_i}$
– np. dla szeregu rozdzielczego

Średnia geometryczna $M_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N X_i}$
– np. średnie tempo wzrostu populacji

Średnia harmoniczna $\frac{1}{M_H} = \frac{1}{N} \sum \frac{1}{X} \quad M_H = \frac{N}{\sum \frac{1}{X}}$
– liczby dodatnie,
– większe znaczenie dla mniejszych wartości

Miary rozproszenia. Wariancja i odchylenie standardowe.

Stosowane konwencje oznaczeń.

odchylenie od średniej – obliczane dla każdego pomiaru	$x_i = X_i - \bar{X}$
suma kwadratów odchyleń (SKO)	$\sum x_i^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$
można korzystać z wyrażenia (dużo bardziej praktyczne)	$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N}$
wariancja	$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{N-1}$
odchylenie standardowe	$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N-1}}$

Statystyka opisowa

Obliczanie podstawowych statystyk opisujących pobraną próbę:

- średnie, mediana, moda,
- zmienność (wariancja, odchylenie standardowe),
- charakterystyki kształtu rozkładu,
- zgodność z założoną postacią rozkładu,
- przedział ufności.

Graficzne przedstawienie danych:

- histogram.

Szereg rozdzielczy. Przedziały klasowe.

Większa liczba pomiarów:

- grupujemy w klasy
- liczba klas zależy od liczebności próby.

Orientacyjnie:

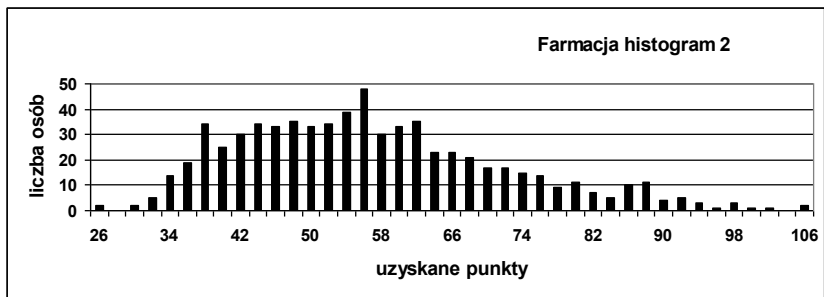
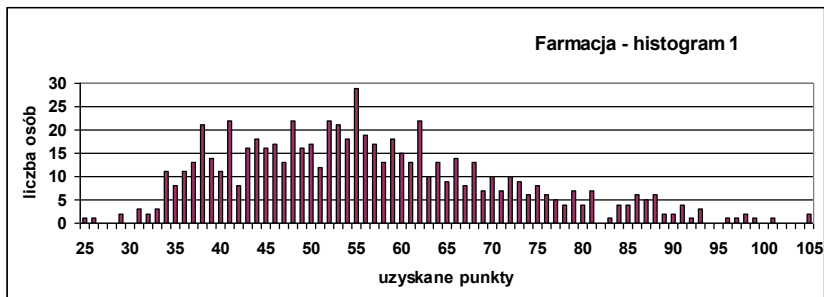
kilkanaście pomiarów	- 4-5 przedziałów
setki pomiarów	- 8-10 przedziałów
tysiące pomiarów	- 12 przedziałów

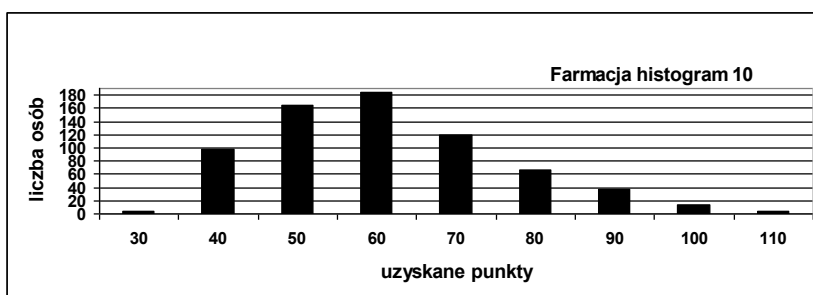
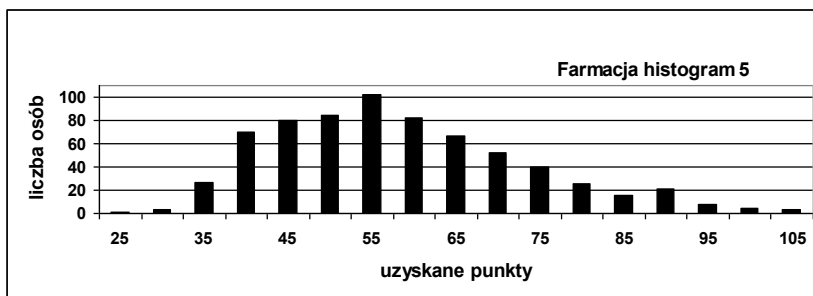
Rozkład prawoskośny

- prawa strona rozkładu ma mniejsze nachylenie,
- więcej pomiarów jest poniżej średniej.

Rozkład lewoskośny

- lewa strona rozkładu ma mniejsze nachylenie,
- więcej pomiarów jest powyżej średniej.





Wyniki semestru zimowego (farmacja, N=124 osoby)

punkty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
liczba osób	2	4	9	8	4	10	7	6	8	3	6	4	4	2

punkty	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
liczba osób	4	4	6	8	14	1	3	2	1	0	1	2	1

Narysuj histogram dla danych surowych.

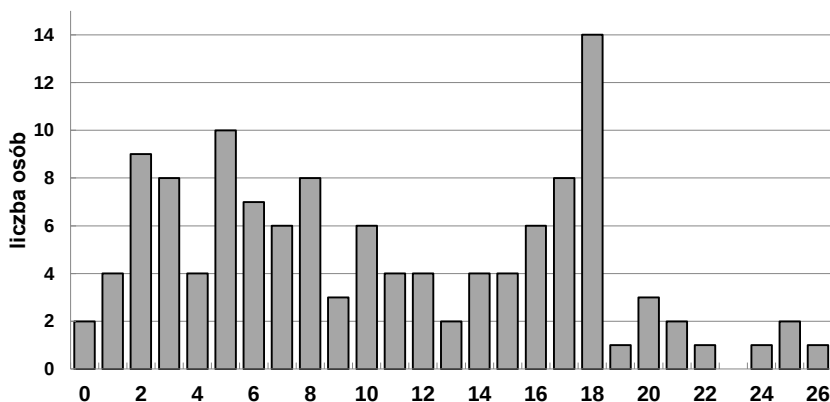
Utwórz szereg rozdzielczy (ile przedziałów?), narysuj histogram dla szeregu rozdzielczego.

Oblicz średnią liczbę uzyskanych punktów, oblicz średnią ważoną liczbę uzyskanych punktów dla szeregu rozdzielczego.

Rozstęp, mediana, moda, przedział modalny dla szeregu rozdzielczego.

Mamy 124 osoby, ale tylko 27 kategorii (różne liczby punktów).
Liczba klas na które podzielimy nasz zbiór: $6 \div 9$.

Histogram sporządzony dla danych surowych.



X_i	n_i	$n_i \cdot X_i$	$n_i \cdot X_i^2$
0	2	0	0
1	4	4	4
2	9	18	36
3	8	24	72
4	4	16	64
5	10	50	250
6	7	42	252
7	6	42	294
8	8	64	512
9	3	27	243
10	6	60	600
11	4	44	484
12	4	48	576
13	2	26	338
14	4	56	784
15	4	60	900
16	6	96	1536
17	8	136	2312
18	14	252	4536
19	1	19	361
20	3	60	1200
21	2	42	882
22	1	22	484
23	0	0	0
24	1	24	576
25	2	50	1250
26	1	26	676

Obliczamy:

$$N = \sum n_i = 124$$

$$\sum X = 1308$$

$$\sum X^2 = 19222$$

$$\bar{X} = 10.548$$

$$SKO = 19222 - \frac{1308^2}{124} = 5424.71$$

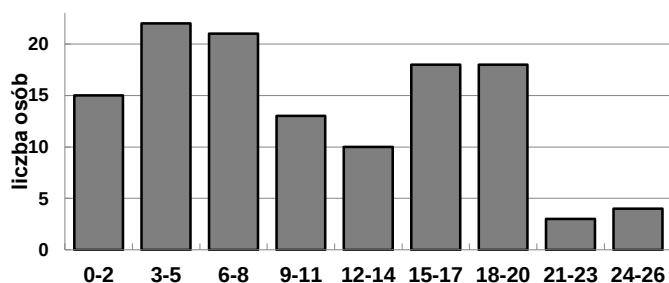
$$s^2 = \frac{SKO}{N-1} = 44.103$$

$$s = \sqrt{s^2} = 6.64$$

$$Me = 10$$

$$Mo = 18$$

Histogram dla 9 kategorii.



punkty	osoby	środek	
0-2	15	1	15
3-5	22	4	88
6-8	21	7	147
9-11	13	10	130
12-14	10	13	130
15-17	18	16	288
18-20	18	19	342
21-23	3	22	66
24-26	4	25	100

Średnia ważona:

$$\bar{X}_w = 10.53$$

Przedział modalny:

drugi

$$Mo = 3-5$$

$$\text{średnia} = 4$$

punkty	liczebność	A	B
0-4	27	0-4.5	<0;5)
5-9	34	4.5-9.5	<5;10)
10-14	20	9.5-14.5	<10;14)
15-19	33	14.5-19.5	<15;20)
20-24	7	19.5-24.5	<20;25)
25-29	3	24.5-28.5	<25;28)

A, B – granice przedziałów rzeczywistych

A – normalne zaokrąglenie (obliczenia, masa)

B – dane takie jak np.wiek

Dokonano $N=25$ pomiarów.

12	30	23	14	24	24	35	23	61	22	43	39	45
23	34	45	23	45	67	65	24	32	12	23	12	

Przypisz rangi w kolejności od najmniejszej do największej (pamiętaj o rangach wiązanych).

Oblicz rozstęp, średnią, medianę, określ modę.

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe.

Pytania na które trzeba sobie odpowiedzieć: (niekoniecznie w takiej kolejności)

- Co chcemy sprawdzić, jaka H_0 i H_1 ? /np. średnia, rozkład itp./
- Test dla 1, 2 czy większej liczby próbek.
- Co wiemy o populacji (lub populacjach) z których dokonujemy losowania?
- Jakie założenia możemy przyjąć (wynika z poprzedniego)?
- Jakiego rodzaju danymi dysponujemy (skale pomiarowe).

Dane w skali interwałowej (jedna zmienna niezależna).

Jedna próba.

Hipoteza o średniej z populacji:

- σ znane - test z,
- σ nieznane – test t.

Hipoteza o innych parametrach niż średnia

(np. wariancja, skośność):

- test χ^2 dla wariancji.

Dwie próby.

- Hipoteza o różnicy pomiędzy średnimi dwóch niezależnych populacji:

- test t dla dwóch niezależnych prób,
- test z dla dwóch niezależnych prób,
- jednoczynnikowa analiza wariancji.

- Hipoteza o wariancjach dwóch niezależnych populacji:

- test F dla wariancji dla dwóch populacji.

- Hipoteza o różnicy pomiędzy średnimi dwóch zależnych populacji.

- test t dla dwóch zależnych prób (test dla par wiązanych),
- test z dla dwóch zależnych prób.

- Hipoteza o wariancjach dwóch niezależnych populacji:

- test t na jednorodność wariancji dwóch prób zależnych.

Dwie lub więcej prób.

- Hipoteza o różnicy pomiędzy średnimi dwóch lub więcej niezależnych populacji:
 - jednoczynnikowa analiza wariancji.
- Hipoteza o wariancjach dwóch lub więcej niezależnych populacji:
 - test F dla wariancji.
- Hipoteza o różnicy pomiędzy średnimi dwóch lub więcej zależnych populacji:
 - jednoczynnikowa analiza wariancji.

Test z dla jednej próby.

- Chcemy zbadać czy próba o średniej została (lub nie) otrzymana z populacji o średniej μ .
- Test z dla jednej próby opiera się na założeniach rozkładu normalnego.
- Jeżeli rezultat testu z dla jednej próby wykaże znaczącą różnicę to należy stwierdzić, że jest wysoce prawdopodobne iż próbka pochodzi z populacji o innej średniej niż μ .

Rozkład jazdy wymaga aby tramwaje kursowały co $\mu=8$ minut i aby odchylenie standardowe wynosiło $\sigma=2$ minuty. Dokonano 30 pomiarów, czy próbka rzeczywiście może pochodzić z populacji o $\mu=8$?

Hipoteza zerowa: **$H_0: \mu = 8$**

Hipotezy alternatywne (można postawić tylko jedną):

$H_1: \mu \neq 8$ test dwustronny, hipoteza alternatywna nieukierunkowana,

$H_1: \mu > 8$ test jednostronny, ukierunkowana hipoteza alternatywna ($z > 0$),

$H_1: \mu < 8$ test jednostronny, ukierunkowana hipoteza alternatywna ($z < 0$).

DANE:

9	10	6	4	8	11	10	5	5	6	13	12	4	3	2
3	9	12	5	6	6	8	9	8	5	7	9	10	9	5

$$\sum X = 219 \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = 7,3$$

błąd standardowy, odchylenie standardowe dla średniej:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = 0,3651$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{7,3 - 8,0}{0,3651} = -1,917$$

Wartości krytyczne dla testu **z**

	$Z_{0,05}$	$Z_{0,01}$
Dwustronne	1,96	2,58
Jednostronne	1,65	2,33

Jaka decyzja?

Do zrobienia:

Czy próba $N=32$ może pochodzić z populacji o $\mu=20$ i $\sigma=7$?

15	18	23	22	38	25	23	25
22	19	18	21	25	32	30	25
29	20	13	20	29	23	17	16
36	21	16	19	33	24	26	13

Przeanalizuj różne możliwe hipotezy alternatywne, oszacuj błąd I rodzaju.

Test t dla jednej próby.

- Chcemy zbadać czy próba o średniej $\bar{X}$ została (lub nie) otrzymana z populacji o średniej μ .
- Test t dla jednej próby opiera się na założeniach rozkładu normalnego, zakładamy że losujemy z populacji o rozkładzie normalnym.
- Nie znamy σ , zastępujemy przez s .
- Jeżeli rezultat testu t dla jednej próby wykaże znaczącą różnicę to należy stwierdzić, że jest wysoce prawdopodobne iż próbka pochodzi z populacji o innej średniej niż μ .

Czy próba:

9	10	8	4	8	3	0	10	15	9
---	----	---	---	---	---	---	----	----	---

może pochodzić z populacji o $\mu=5$?

Hipoteza zerowa: $H_0: \mu = 5$

Hipotezy alternatywne (można postawić tylko jedną):

- $H_1: \mu \neq 5$ test dwustronny, hipoteza alternatywna nieukierunkowana,
- $H_1: \mu > 5$ test jednostronny, ukierunkowana hipoteza alternatywna ($t > 0$),
- $H_1: \mu < 5$ test jednostronny, ukierunkowana hipoteza alternatywna ($t < 0$).

$$\sum X = 76 \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = 7,6$$

i	X_i	X_i^2
1	9	81
2	10	100
3	8	64
4	4	16
5	8	64
6	3	9
7	0	0
8	10	100
9	15	225
10	9	81
SUMA	76	740

odchylenie standardowe:

$$SKO = \sum x_i^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N} = 740 - \frac{76^2}{10} = 162,4$$

$$df = N - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$s = \sqrt{\frac{SKO}{N-1}} = \sqrt{\frac{162,4}{9}} = 4,247$$

błąd standardowy, odchylenie standardowe dla średniej:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{4,247}{\sqrt{10}} = 1,343$$

$$\text{statystyka } t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}} = \frac{7,6 - 5}{1,343} = 1,936$$

Wartości krytyczne dla testu t ($df=N-1=9$)
 /przy innych wartościach df otrzymamy inne wartości krytyczne!
 trzeba skorzystać z odpowiedniej tabeli/

	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$
dwustronne	2,26	3,25
jednostronne	1,83	2,82

Jaka decyzja?

Do zrobienia:

Czy próba $N=20$ może pochodzić z populacji o $\mu=15$?

16	17	19	15	13
14	16	18	20	18
16	15	14	15	18
18	14	16	15	13

Przeanalizuj różne możliwe hipotezy alternatywne dla różnych poziomów istotności ($\alpha=0,05$ i $\alpha=0,01$), jeżeli odrzucasz H_0 to oszacuj błąd I rodzaju.

Czy próba $N=16$ może pochodzić z populacji o $\mu=14,75$?

16	13	13	13
14	15	13	12
12	15	15	15
16	13	16	13

Przeanalizuj różne możliwe hipotezy alternatywne dla różnych poziomów istotności ($\alpha=0,05$ i $\alpha=0,01$), jeżeli odrzucasz H_0 to oszacuj błąd I rodzaju.

Test χ^2 dla wariancji z populacji dla jednej próby.

- Chcemy zbadać czy próba o wariancji s^2 została (lub nie) otrzymana z populacji o wariancji σ^2 .
- Test χ^2 dla jednej próby opiera się na założeniach rozkładu normalnego, zakładamy że losujemy z populacji o rozkładzie normalnym.
- Jeżeli rezultat testu χ^2 wykaże znaczącą różnicę to należy stwierdzić, że jest wysoce prawdopodobne iż próbka pochodzi z populacji o wariancji innej niż σ^2 .

Czy próba:

4	3	11	12	9	13	6	8	5	6
---	---	----	----	---	----	---	---	---	---

może pochodzić z populacji o $\sigma^2=5$?
(dla poziomu istotności $\alpha=0,02$)

Hipoteza zerowa: $H_0: \sigma^2 = 5$

Hipotezy alternatywne (można postawić tylko jedną):

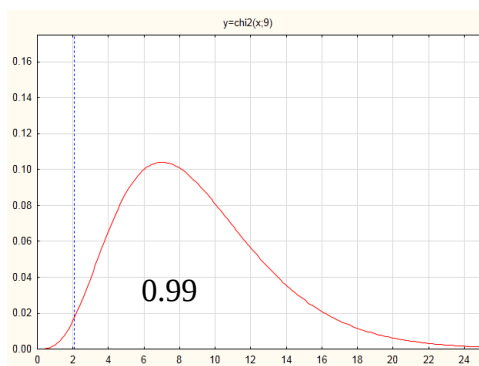
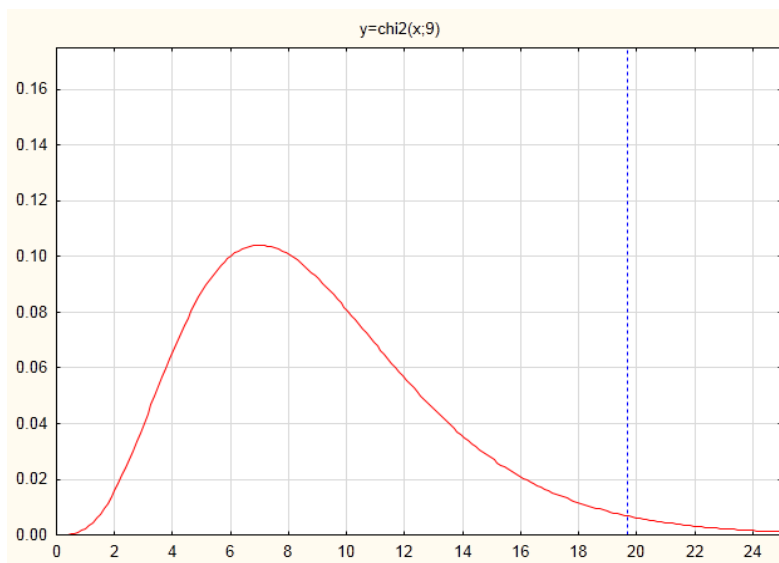
$H_1: \sigma^2 \neq 5$ test dwustronny, hipoteza alternatywna nieukierunkowana,

$H_1: \sigma^2 > 5$ test jednostronny, ukierunkowana hipoteza alternatywna,

$H_1: \sigma^2 < 5$ test jednostronny, ukierunkowana hipoteza alternatywna.

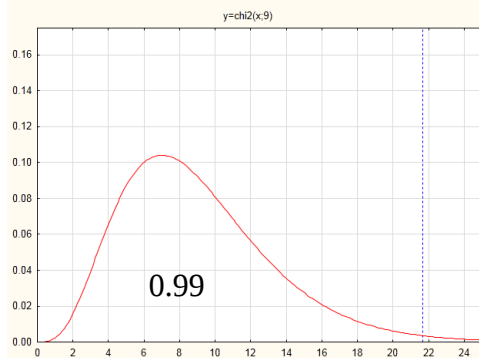
Tablice są przystosowane do rozkładu jednostronnego, należy odczytać wartości graniczne dla lewej i prawej strony rozkładu χ^2 .

Jednostronny test χ^2 , dla $df=9$ i $\alpha=0.02$



Dwustronny test χ^2 ,
dla $df=9$ i $\alpha=0.02$

Po każdej ze stron ma
pozostać $p=0.01$



i	X_i	X_i^2
1	5	25
2	6	36
3	4	16
4	3	9
5	11	121
6	12	144
7	9	81
8	13	169
9	6	36
10	8	64
SUMA	77	701

$$s^2 = 12,011$$

$$df = N - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$\chi^2 = \frac{df \cdot s^2}{\sigma^2} = \frac{9 \cdot 12,011}{5} = 21,62$$

Wartości graniczne dla $\alpha=0,02$ i $df=9$

przy teście dwustronnym:

$$\text{lewostronna: } \chi^2_{0,99}=2,09$$

$$\text{prawostronna: } \chi^2_{0,01}=21,67$$

Wartości graniczne dla $\alpha=0,02$ i $df=9$

przy teście jednostronnym ($H_1: \sigma^2 > 5$)

$$\chi^2_{0,02}=19,68$$

Jaka decyzja?

Czy próba $N=20$ może pochodzić z populacji o $\sigma^2=2,5$?

16	17	19	15	13
14	16	18	20	18
16	15	14	15	18
18	14	16	15	13

Przeanalizuj różne możliwe hipotezy alternatywne:

dla $H_1: \sigma^2 > 2,5$ i $\alpha=0,05$

oraz

dla $H_1: \sigma^2 \neq 2,5$ i $\alpha=0,02$

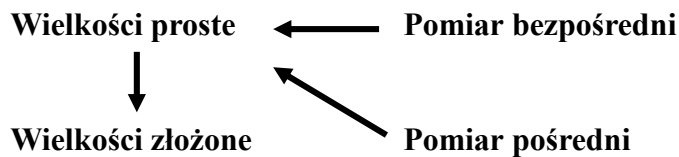
Jeżeli odrzucasz H_0 to oszacuj błąd I rodzaju.

ANALIZA BŁĘDÓW POMIAROWYCH

Przeprowadzając analizę ilościową zmuszeni jesteśmy do pomiaru wielkości fizycznych (temperatura, stężenie, pH, lepkość).

Wielkości można wyznaczyć w sposób pośredni lub bezpośredni.

Korzystamy z przyrządów pomiarowych, niekiedy otrzymanymi wielkościami posługujemy się w dalszych obliczeniach.



Pomiar bezpośredni wielkości prostej:

- wyznaczanie pH za pomocą pH-metru.
- pomiar temperatury za pomocą termometru cieczowego lub cyfrowego

Pomiar pośredni wielkości prostej:

- pomiar siły elektromotorycznej (SEM) ogniwa którego SEM
zależy od pH
- pomiar temperatury za pomocą termopary podłączonej
do woltomierza (wynik pomiaru musi być przeliczony na temperaturę)

Pomiar wielkości złożonej:

- nie dysponujemy przyrządem który byłby w stanie zmierzyć interesującą nas wielkość (bezpośrednio lub pośrednio).
- dokonujemy pomiarów kilku wielkości prostych
- na ich podstawie dopiero obliczamy potrzebną wielkość

Jeżeli chcemy wyznaczyć gęstość cieczy to należy dokonać pomiaru masy i objętości, na ich podstawie możemy obliczyć gęstość (metoda piknometryczna).

Jeżeli jednak dysponowalibyśmy przyrządem który wyznacza gęstość w pojedynczym pomiarze to będzie ona traktowana jako wielkość prosta.

Nie jesteśmy w stanie ustalić dokładnej mierzonej wartości fizycznej:

- dokładność przyrządu użytego do pomiaru,
- dokładność wzorca,
- niedokładności wynikające z błędów popełnianych podczas pomiaru.

Wartość mierzona podczas doświadczenia nie jest wartością dokładną (prawdziwą, rzeczywistą).

wielkością wyznaczoną podczas pomiaru =

wartość dokładna + wartości błędów podczas pomiaru

Czy możemy więc w sposób wiarygodny oszacować wartość dokładną?

W jaki sposób określić dokładność takiego oszacowania?

Jakie praktyczne wnioski można wyciągnąć znając sposoby szacowania przybliżonych wartości fizycznych?

Pomiar wielkości fizycznej polega na porównaniu jej z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę (wzorzec).

Wynik pomiaru lub obliczonej wartości wielkości złożonej musi być uzupełniony podaniem wartości błędu oraz jednostki w jakich te wielkości są podane, inaczej nie przedstawia żadnej wartości.

BŁĘDY POMIAROWE

Wynik pomiaru X wartości fizycznej jest związany z wartością rzeczywistą X_0 zależnością:

$$(1) \quad X = X_0 + \Delta X$$

ΔX –

- błąd bezwzględny, różnica pomiędzy wartością zmierzoną i dokładną
- błąd bezwzględny jest nieznan
- nieużyteczny jako miara dokładności
- można go oszacować posługując się metodami rachunku błędów

Wielkością dogodniejszą przy porównywaniu dokładności różnych pomiarów jest błąd względny (δ).

$$(2) \quad \delta = \left| \frac{\Delta X}{X_0} \right| = \left| \frac{X - X_0}{X_0} \right|$$

Wielkość ta dla pojedynczego pomiaru nie jest znana:

- stosunek dwóch nieznanymi wartości,
- można ją jedynie oszacować.

Błędy pomiarowe (doświadczalne) można podzielić na trzy rodzaje:

- systematyczne - mogą wynikać z zastosowania niewłaściwej metody analitycznej, posługiwania się rozkalibrowanym przyrządem pomiarowym lub też wpływu jakiś czynników zewnętrznych na wyniki pomiarów ,
- przypadkowe - są związane z samym pomiarem, dokonując wielokrotnego pomiaru możemy uzyskać różne wyniki, można wpływać na ich wielkość wybierając inną technikę analityczną lub zmieniając układ pomiarowy,
- grube - wynik pomyłki eksperymentatora lub zastosowania ewidentnie niewłaściwej techniki pomiarowej.

NIEPEWNOŚĆ POMIAROWA

Parametrem który charakteryzuje rozrzut wyników, który w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej jest **niepewność pomiarowa**.

niepewności typu A - ocena oparta będzie na analizie statystycznej to
niepewności typu B - zastosowanie innej metody do oceny

Dokonując pomiaru, nie znamy wartości dokładnej a jedynie wartość zmierzoną. W serii n pomiarów otrzymujemy wartości X_i $i=1, 2, \dots, n$. Dysponując danymi doświadczalnymi szukamy wartości najbardziej zbliżonej do wartości dokładnej.

Wartość średnia dla próby (serii pomiarów) stanowi najlepszą ocenę (estymator) wartości średniej dla populacji, czyli w tym przypadku wartości dokładnej.

$$(3) \quad \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\text{Jeżeli:} \quad n \rightarrow \infty \quad \bar{X} \rightarrow \mu$$

Średnią wartość błędu jaki jest popełniany podczas pojedynczego pomiaru oceniamy (estymujemy) korzystając ze wzoru:

$$(4) \quad \bar{S}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

niepewność pomiaru

- odchylenie standardowe,
- średnie odchylenie kwadratowe lub
- średnia niepewność kwadratowa

Niepewność standardowa jest zdefiniowana jako odchylenie standardowe średniej arytmetycznej (błąd standardowy):

$$(5) \quad u(\bar{X}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Niepewność standardowa jednoznacznie określa niepewność związaną ze średnią. Jeżeli jednak chcemy nasz wynik porównać z innymi rezultatami takimi jak wartości tabelaryczne lub normy zdrowotne to należy posłużyć się pojęciem **niepewności rozszerzonej**, oznaczonej symbolem $U(\bar{X})$

$$(6) \quad U(\bar{X}) = k \cdot u(\bar{X})$$

Wielkość **k** nazywamy współczynnikiem rozszerzenia, jest tak dobrana aby w przedziale $X = \bar{X} \pm U(\bar{X})$

znalazła się większość wyników pomiaru potrzebna dla danego zastosowania. Zalecaną wielkością jest $k=2$.

Wynik pomiaru zapisujemy więc ostatecznie korzystając ze średniej oraz niepewności rozszerzonej

$$(7) \quad X = \bar{X} \pm U(\bar{X})$$

Przedstawione wzory są podstawowe przy ocenie **niepewności** pomiaru **typu A** jakiej dokonujemy przy użyciu metod statystycznych.

Niekiedy dysponujemy tylko **pojedynczym** pomiarem i nie możemy przeprowadzić analizy statystycznej. Jest tak w sytuacji gdy nie ma czasu na wykonanie kolejnych pomiarów lub wskazania mierników nie zmieniają się. W ocenie **niepewności typu B** pomocne mogą być informacje o przyrządzie za pomocą którego wykonany został pomiar (klasa przyrządu), pochodzące z literatury lub wcześniejszych badań.

Pomiar pojedynczy.

Oceny niepewności należy dokonać korzystając z klasy przyrządu pomiarowego, o ile taka informacja jest dostępna (informacja na przyrządzie lub instrukcja obsługi).

Przez klasę przyrządu pomiarowego K rozumiemy stosunek maksymalnego błędu $\Delta X_{\max}$ do zakresu pomiarowego Z , klasę przyrządu wyrażamy w procentach.

$$(8) \quad K = \frac{\Delta X_{\max}}{Z} \cdot 100\%$$

Niepewność pomiarowa - maksymalny błąd jaki może być popełniony na danym zakresie pomiarowym.

$$(9) \quad u(X) = \Delta X_{\max} = \frac{K \cdot Z}{100}$$

Wniosek praktyczny:

ponieważ niepewność pomiarowa zależy od zakresu na jakim dokonuje się pomiaru to należy więc wybrać najmniejszy możliwy zakres.

Czasami korzystamy z przyrządów pomiarowych o klasie których nie mamy żadnej informacji np. termometr lekarski, biureta, suwmiarka, linijka czy taśma miernicza. W takiej sytuacji przyjmuje się, że niepewność pomiarowa jest równa wartości najmniejszej podziałki przyrządu pomiarowego ($p_{\min}$).

$$(10) \quad u(X) = p_{\min}$$

W przypadku termometru lekarskiego jest to $0,1^{\circ}\text{C}$, natomiast dla suwmiarki wartość ta będzie wynosiła $0,1 \text{ mm}$.

Ten sposób szacowania jest bardzo ostrożny, gdyż najmniejsza podziałka odpowiada wartości największego błędu jaki możemy popełnić przy pomiarze, natomiast niepewność standardowa jest szacunkiem błędu przeciętnego. Niekiedy stosuje się słabsze kryterium oceny niepewności pomiarowej.

$$(11) \quad u(X) = \frac{p_{\min}}{3}$$

Niepewność standardową można też oszacować obliczając odchylenie standardowe dla rozkładu prostokątnego, który znajduje zastosowanie w modelowym opisie niepewności pomiaru.

$$(12) \quad u(X) = \frac{p_{\min}}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx \frac{p_{\min}}{3,464}$$

Skoro mamy trzy sposoby oceny niepewności pomiarowej to nasuwa się pytanie który należy wybrać.

Jeżeli dysponujemy przyrządem cechowanym (legalizowanym), co do którego rzetelności nie mamy wątpliwości, bez obawy możemy zastosować łagodniejsze szacowanie niepewności. W innych przypadkach konieczne jest przyjęcie najmniejszej podziałki za wartość niepewności pomiarowej.

Posługiwanie się nie legalizowanym przyrządem jest związane z możliwością popełnienia błędu systematycznego, jeżeli to możliwe warto jest porównać wskazania przyrządu ze wzorcem.

W wielu przypadkach nie dysponujemy przyrządem który zmierzyłby interesująca nas wielkość w sposób bezpośredni lub pośredni. Zmuszeni jesteśmy, korzystając ze znanej zależności funkcyjnej, obliczyć wartość wielkości złożonej. Dysponujemy wartościami średnimi oraz niepewnościami standardowymi pomiarów wielkości prostych i na ich podstawie oszacujemy wartość wielkości złożonej oraz odpowiadającą jej **niepewność złożoną**.

Rozróżnić należy przypadki w których błędy pomiarowe są niezależne lub zależne. Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia gdy pomiarów dokonujemy różnymi przyrządami oraz eliminujemy błąd odczytu obserwatora. Warunki te są spełnione na przykład wtedy gdy wielkości proste są wyznaczane za pomocą pojedynczego pomiaru, różnymi przyrządami i przez różne osoby. Jeżeli warunki niezależności błędów pomiarowych nie są spełnione to mamy do czynienia z pomiarami i błędami zależnymi.

W celu wyznaczenia wartości wielkości złożonej Y dokonano pomiarów i obliczono wartości średnie dla N zmiennych prostych oraz oszacowano wartości błędów (niepewności) standardowych .

$$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N \quad u(\bar{X}_1), u(\bar{X}_2), \dots, u(\bar{X}_N)$$

Średnią wartość wielkości złożonej obliczamy na podstawie średnich arytmetycznych wartości średnich zmiennych prostych.

$$(13) \quad \bar{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$$

Niepewność standardową wielkości złożonej (niepewność złożoną) oblicza się korzystając z prawa przenoszenia błędów. Omówiony zostanie przypadek, oraz przedstawione wzory, błędów zależnych jako częściej występujący w praktyce analitycznej.

Stosunkowo często wielkość złożoną wylicza się ze wzoru będącego iloczynem dowolnych potęg wielkości prostych. Niekiedy wymagane są drobne przekształcenia algebraiczne jeżeli we wzorze występują sumy lub różnice wielkości prostych.

$$(14) \quad Y = k \cdot X_1^a \cdot X_2^b \cdot \dots \cdot X_N^c$$

•Niepewność sumy lub różnicy wielkości prostych jest równa sumie ich niepewności pomiarowych. Otrzymaną sumę (różnicę) traktujemy jako nową zmienną z nową niepewnością standardową.

$$\bar{Y} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 \quad u(\bar{Y}) = u(\bar{X}_1) + u(\bar{X}_2)$$

•Obliczamy: $\bar{Y} = k \cdot \bar{X}_1^a \cdot \bar{X}_2^b \cdot \dots \cdot \bar{X}_N^c$

- Niepewność względną definiujemy przez analogię do błędu względnego $\left(\frac{u(\bar{X})}{\bar{X}}\right)$

- Obliczamy wartość względnej niepewności wielkości złożonej Y:

$$(15) \quad \frac{u(\bar{Y})}{\bar{Y}} = \left| a \cdot \frac{u(\bar{X}_1)}{\bar{X}_1} \right| + \left| b \cdot \frac{u(\bar{X}_2)}{\bar{X}_2} \right| + \dots + \left| c \cdot \frac{u(\bar{X}_N)}{\bar{X}_N} \right|$$

- Obliczamy niepewność złożoną, wystarczy otrzymaną niepewność względną pomnożyć przez wartość $\bar{Y}$.

Istotną częścią dyskusji uzyskanych wyników jest analiza wpływu poszczególnych czynników na wynik końcowy. Przedstawiony sposób obliczeń niepewności względnej umożliwia prostą analizę. Chcąc zwiększyć dokładność pomiaru w pierwszej kolejności należy minimalizować składniki o największej wartości.

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI.

Znając niepewność standardową jesteśmy w stanie określić przedział w jakim, z określonym prawdopodobieństwem, możemy spodziewać się wartości dokładnej (**przedział ufności**). Sposób oceny zależy od długości serii pomiarowej. Dla $n > 30$ przyjmuje się, że rozkład błędów nie różni się od rozkładu normalnego. Zakładając poziom ufności równy $1-\alpha=0,95$ (95%) przy ocenie przedziału korzysta się ze wzoru:

$$(16) \quad u_t(\bar{X}) = 1,96 \cdot u(\bar{X}) \approx 2 \cdot u(\bar{X})$$

Czyli z prawdopodobieństwem 95% wartość dokładna X_0 znajduje się w przedziale:

$$(\bar{X} - u_t(\bar{X}), \bar{X} + u_t(\bar{X}))$$

Jeżeli dysponujemy krótszą seria pomiarową to rozkład błędów może odbiegać od normalnego, współczynnik który występuje we wzorze przy niepewności standardowej przyjmuje większą wartość, korzystamy ze wzoru:

$$(17) \quad u_t(\bar{X}) = t_{n-1, \alpha} \cdot u(\bar{X})$$

Wielkość $t_{n-1, \alpha}$ odczytujemy z tablic rozkładu t-Studenta dla danych wartości $n-1$ oraz α (lub $1 - \alpha$).

Wartość $u_t(\bar{X})$ jest obliczana z podobnego wzoru jak niepewność rozszerzona. Przyjmowana zazwyczaj wartość współczynnika rozszerzenia ($k=2$) odpowiada 95% przedziałowi ufności dla długiej serii pomiarowej i tak może być interpretowana niepewność rozszerzona. Jednak dysponując krótką serią pomiarową przedział ufności należy bezwzględnie obliczać korzystając ze wzoru (17).

ZAOKRĄGLANIE WYNIKÓW

Zarówno wartość średnia jak i niepewność standardowa (lub rozszerzona) mogą być podane z taką ilością cyfr znaczących na ile pozwala używany kalkulator lub program komputerowy. Należy zaokrąglić liczby (średnią i niepewność), czyli zmniejszyć liczbę ich cyfr znaczących.

Ogólnie przyjęte zasady przeprowadzania obliczeń i zaokrągleń.

- Najpierw zaokrąglamy niepewność pomiarową.
- O ile to możliwe obliczenia należy przeprowadzać z pełną dokładnością, zaokrąglając dopiero wyniki końcowe.

- Zaokrąglenia niepewności dokonujemy zawsze w górę, pozostawiając 1 (niekiedy 2) cyfry znaczące. Jeżeli zaokrąglenie niepewności do 1 cyfry znaczącej powoduje wzrost niepewności o więcej niż 10% to zaokrąglenia należy dokonać do 2 cyfr znaczących.
- Wyniki (średnie) należy zaokrąglić tak, aby były podane z dokładnością do miejsca, na którym występuje ostatnia cyfra znacząca niepewności.

Przykład 1.

Z partii tabletek pobrano 6 sztuk i zważono otrzymując następujące wyniki 102 mg, 107 mg, 106 mg, 104 mg, 104 mg, 107 mg. Należy obliczyć średnią masę tabletki, niepewność standardową i rozszerzoną oraz 95% przedział ufności dla średniej.

Wartość średnia:

$$\bar{X} = \frac{102 + 107 + 106 + 104 + 104 + 107}{6} = 105 \text{ mg}$$

Niepewność standardowa:

$$\begin{aligned} u(\bar{X}) &= \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 5} [(102 - 105)^2 + (107 - 105)^2 + (106 - 105)^2 + (104 - 105)^2 + (104 - 105)^2 + (107 - 105)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{20}{30}} = 0,8165 \text{ mg} \end{aligned}$$

Niepewność rozszerzona: $U(\bar{X}) = 2 \cdot u(\bar{X}) = 1,633 \text{ mg}$

Zgodnie z zasadami zaokrąglania i zapisu najpierw należy zaokrąglić niepewność standardową do 1 lub 2 miejsc znaczących czyli odpowiednio do 0,9 lub 0,82. Obliczamy o ile wzrośnie wartość błędu przy zaokrągleniu do 1 miejsca znaczącego.

$$\frac{0,9 - 0,8165}{0,8165} \cdot 100\% \approx 10\%$$

Ponieważ wzrost wartości błędu nie przekracza 10%, zaokrąglenia należy dokonać do 1 cyfry znaczącej. Podobnie robimy dla niepewności rozszerzonej:

$$\frac{2 - 1,633}{1,633} \cdot 100\% \approx 22\%$$

Ponieważ wzrost wartości błędu przekracza 10%, zaokrąglenia należy dokonać do 2 cyfr znaczących. $U(\bar{X}) = 1,7$

Prawidłowy zapis zawiera wynik, niepewność standardową i jednostkę.

$$X = 105,0 \text{ mg} \quad u(X) = 0,9 \text{ mg}$$

Jeżeli wynik zapisujemy korzystając z niepewności rozszerzonej to poprawny zapis ma postać:

$$X = 105,0 \pm 1,7 \text{ mg}$$

Dysponujemy serią pomiarów o niewielkiej liczebności $n=6$. Chcąc określić przedział ufności dla $1-\alpha=0,95$ należy w tablicach rozkładu t-Studenta odczytać wartość parametru

$$t_{n-1,\alpha} = t_{5;0,05} \approx 2,57$$

$$u_t(\bar{X}) = t_{n-1;\alpha} \cdot u(\bar{X}) = 2,57 \cdot 0,8165 \text{ mg} = 2,099 \text{ mg}$$

Zaokrąglenia wartości $u_t(\bar{X})$ dokonuje się do 1 lub 2 miejsc znaczących na takich samych zasadach jak niepewności pomiarowej. Zaokrąglenie do 1 miejsca znaczącego prowadzi do wartości $u_t(\bar{X}) = 3 \text{ mg}$

$$\frac{3 - 2,099}{2,099} \cdot 100\% \approx 43\%$$

Błąd zaokrąglenia znacznie przekracza 10 %, czyli należy zostawić 2 miejsca znaczące $u_t(\bar{X}) = 2,1 \text{ mg}$

Z prawdopodobieństwem 95% można stwierdzić, że przeciętna masa tabletek, wszystkich w partii z której pobrano próbę, jest zawarta w przedziale

$$(105,0 - 2,1; 105,0 + 2,1) = (102,9 \text{ mg}; 107,1 \text{ mg})$$

Przykład 2.

Gęstość cieczy można wyznaczyć za pomocą piknometru. Jest to metoda porównawcza, gdyż wymaga znajomości gęstości innej cieczy, zazwyczaj jest to woda. Należy wyznaczyć masy: piknometru suchego, napełnionego wodą oraz badaną cieczą. Pomiary wykonuje się w stałej temperaturze. Gęstość cieczy oblicza się ze wzoru.

$$\rho_{\text{ciecz}} = \frac{m_{\text{ciecz}} - m_{\text{suchy}}}{m_{\text{H}_2\text{O}} - m_{\text{suchy}}} \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}}$$

Jaką niepewnością złożoną obarczony jest pomiar gęstości tą metodą, należy również podać niepewność rozszerzoną. Pomiar przeprowadzano w temperaturze $t = 20^\circ\text{C}$.

Tablicowa gęstość wody

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 998,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Niepewność związana z tą wielkością wynika raczej z dokładności pomiaru i utrzymania stałej temperatury w trakcie pomiaru niż dokładności wielkości wziętej z tablic. Zmiana temperatury o 1°C powoduje zmianę gęstości wody o 0,21 kg·m⁻³. Masa wyznaczana była na wadze o najmniejszej działce 1 mg.

Otrzymane masy i niepewności pomiarowe:

$$\begin{aligned} m_{suchy} &= 9,234 \text{ g} & u(m_{suchy}) &= \frac{0,001}{3} \text{ g} \\ m_{ciecz} &= 14,452 \text{ g} & u(m_{ciecz}) &= \frac{0,001}{3} \text{ g} \\ m_{H_2O} &= 15,835 \text{ g} & u(m_{H_2O}) &= \frac{0,001}{3} \text{ g} \\ \rho_{H_2O} &= 998,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} & u(\rho_{H_2O}) &= 0,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

Obliczona gęstość cieczy:

$$\begin{aligned} \rho_{ciecz} &= \frac{14,452 \text{ g} - 9,234 \text{ g}}{15,835 \text{ g} - 9,234 \text{ g}} \cdot 998,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = \\ &= \frac{5,191 \text{ g}}{6,601 \text{ g}} \cdot 998,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = \\ &= 0,786396 \cdot 998,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 785,0041 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

Uwaga: nie ma potrzeby zamiany wyznaczonych mas na kilogramy, gdyż interesuje nas tylko ich stosunek, a ten nie ulega zmianie przy zamianie jednostek masy.

Obliczamy różnice mas z licznika i mianownika we wzorze na gęstość:

$$m_{\text{ciecz}} - m_{\text{suchy}} = 14,452 \text{ g} - 9,234 \text{ g} = 5,191 \text{ g}$$

$$m_{\text{H}_2\text{O}} - m_{\text{suchy}} = 15,853 \text{ g} - 9,234 \text{ g} = 6,601 \text{ g}$$

Dla różnic niepewności pomiarowe dodają się:

$$u(m_{\text{ciecz}} - m_{\text{suchy}}) = 2 \cdot \frac{0,001}{3} \text{ g} = 0,000667 \text{ g}$$

$$u(m_{\text{H}_2\text{O}} - m_{\text{suchy}}) = 2 \cdot \frac{0,001}{3} \text{ g} = 0,000667 \text{ g}$$

Obliczamy niepewność względną:

$$\begin{aligned} \frac{u(\rho_{\text{ciecz}})}{\rho_{\text{ciecz}}} &= \left| 1 \cdot \frac{u(m_{\text{ciecz}} - m_{\text{suchy}})}{m_{\text{ciecz}} - m_{\text{suchy}}} \right| + \left| -1 \cdot \frac{u(m_{\text{H}_2\text{O}} - m_{\text{suchy}})}{m_{\text{H}_2\text{O}} - m_{\text{suchy}}} \right| + \left| 1 \cdot \frac{u(\rho_{\text{H}_2\text{O}})}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \right| = \\ &= \frac{0,000667}{5,191} + \frac{0,000667}{6,601} + \frac{0,21}{998,23} = 0,000128 + 0,000101 + 0,000210 = \\ &= 0,000439 \end{aligned}$$

Obliczamy niepewność złożoną i rozszerzoną dla gęstości cieczy:

$$u(\rho_{\text{ciecz}}) = 785,0041 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 0,000439 = 0,3452 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$U(\rho_{\text{ciecz}}) = 2 \cdot u(\rho_{\text{ciecz}}) = 0,6904 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Zaokrąglenia niepewności złożonej dokonujemy do 2 miejsc znaczących gdyż błąd zaokrąglenia dla 1 miejsca znaczącego jest większy od 10%. Niepewność rozszerzona zaokrąglamy do 1 miejsca po przecinku.

$$\frac{0,4 - 0,3452}{0,3452} \cdot 100\% = \frac{0,0548}{0,3452} \cdot 100\% \approx 16\%$$

Poprawny zapis wyznaczonej wartości otrzymanej w wyniku obliczeń ma postać:

$$\rho_{\text{ciecz}} = 785,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad u(\rho_{\text{ciecz}}) = 0,35 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{ciecz}} = (785,0 \pm 0,7) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Istotnym elementem analizy jest oszacowanie wpływu niepewności poszczególnych pomiarów na niepewność złożoną. Porównujemy niepewności względne. Jeżeli chcemy poprawić dokładność wyznaczania gęstości to w pierwszej kolejności należy zadbać o stabilizację i dokładne wyznaczenie temperatury w trakcie pomiaru, największy błąd względny jest związany z temperaturą. W dalszej kolejności można rozważyć zwiększenie dokładności wagi lub skorzystanie z większego piknometru (większa masa skutkuje mniejszym błędem względnym).

Przykład 3.

Farmakopea Polska przewiduje, że pomiar kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła przechodzącego przez roztwór może stanowić podstawę do oznaczania stężenia zawartej w nim substancji, jeżeli jest znana skręcalność właściwa tej substancji.

W polarymetrach wizualnych korzysta się zazwyczaj z linii D sodu (589,3 nm). Skręcalność właściwą substancji stałej oblicza się według wzoru:

$$(18) \quad [\alpha]_D^{20} = \frac{\alpha}{l \cdot c} \cdot 10$$

$[\alpha]_D^{20}$ - skręcalność właściwa, w stopniach, dla linii D sodu w temperaturze 20°C, temperaturę i długość fali zaznacza się przy symbolu.

α - odczytany kąt skręcania płaszczyzny polaryzacji, w stopniach.

l – długość rurki polaryzacyjnej, w cm.

c – stężenie substancji w roztworze, w $\text{mg} \cdot \text{ml}^{-1}$.

Znając skręcalność właściwą $[\alpha]_D^{20}$ korzystając z przekształconego wzoru (18), korzystając z pomiaru kąta skręcania wyznaczyć stężenie substancji w roztworze.

$$(19) \quad c = \frac{\alpha}{l \cdot [\alpha]_D^{20}} \cdot 10$$

Niepewność względną związaną z wyznaczeniem stężenia oblicza się z wzoru:

$$\frac{u(c)}{c} = \left| 1 \cdot \frac{u(\alpha)}{\alpha} \right| + \left| -1 \cdot \frac{u(l)}{l} \right| + \left| -1 \cdot \frac{u([\alpha]_D^{20})}{[\alpha]_D^{20}} \right|$$

Dokonano pomiaru kąta skręcania dla roztworu glukozy. Pomiar był przeprowadzony w polarymetrze przy użyciu rurki polaryzacyjnej o długości $l=10$ cm. Zmierzona wartość kąta $\alpha=10,25^\circ$.

Według Farmakopei Polskiej skręcalność właściwa glukozy bezwodnej $[\alpha]_D^{20}$ wynosi od $+51^\circ$ do $+53^\circ$.

We wzorze (19) należy posłużyć się wartością: $[\alpha]_D^{20} = 52^\circ$ jako przeciętną z podawanych przez Farmakopeę.

$$c = \frac{10,25}{10 \cdot 52} \cdot 10 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1} = 0,19712 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1}$$

Aby ocenić niepewność złożoną dla otrzymanego wyniku należy oszacować niepewności dla pomiarów poszczególnych wielkości. Stopień dokładności pomiaru w polarymetrach wizualnych wynosi $0,05^\circ$, czyli można przyjąć, że niedokładność pomiarowa dla wartości α wynosi:

$$u(\alpha) = \frac{0,05^\circ}{3} = 0,01667^\circ$$

Długości rurki polarymetrycznej w zasadzie nie mierzy się, przyjmując wielkość podaną przez producenta. Nie popełniając dużego błędu można przyjąć, że $u(l)=0,05$ cm, jest to szacunek ostrożny, rzeczywista dokładność wykonania rurki polaryzacyjnej powinna być większa.

Farmakopea podaje wartość $[\alpha]_D^{20} = (52 \pm 1)^\circ$

podaną niepewność traktujemy jako rozszerzoną $u([\alpha]_D^{20}) = 0,5^\circ$

Obliczmy niepewność względną pomiaru stężenia:

$$\frac{u(c)}{c} = \left| \frac{0,01667}{10,25} \right| + \left| \frac{0,05}{10} \right| + \left| \frac{0,5}{52} \right| = 0,00163 + 0,00500 + 0,00962 = 0,01625$$

$$u(c) = c \cdot 0,01625 = 0,19712 \cdot 0,01625 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1} = 0,00320 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1}$$

Niepewność złożoną należy zaokrąglić do 2 miejsc znaczących

$$u(c) = 0,0032 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1}$$

Niepewność rozszerzona wynosi

$$U(c) = 2 \cdot 0,00320 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1} = 0,0064 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1}$$

po zaokrągleniu do 1 miejsca znaczącego przyjmujemy

$$U(c) = 0,007 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1}$$

Otrzymany wynik zapisujemy poprawnie jako

$$c = 0,1971 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1} \quad u(c) = 0,0032 \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1}$$

$$c = (0,197 \pm 0,007) \text{ mg} \cdot \text{ml}^{-1}$$

Największa niepewność względna jest związana ze skręcalnością właściwą substancji, nie można jej zmniejszyć gdyż opieramy się na danych z Farmakopei. Można uznać, że niepewność związana z wyznaczeniem kąta skręcania nie ma istotnego wpływu na niepewność wyznaczenia stężenia.

Zauważmy, że co prawda szacowaliśmy niepewność wyznaczenia długości rurki polaryzacyjnej i jej wpływ na niepewność złożoną, ale tę wielkość należy raczej traktować jako stałą związaną z aparatem pomiarowym, gdyż nie mamy wpływu na jakość wykonania rurki.

Test z dla dwóch niezależnych prób.

Wariancja populacji z których losowano próby jest znana (σ_1 i σ_2).

$H_0: \mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$, czyli $\mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu \neq 0$

$H_1: \mu > 0$, czyli $\mu_1 > \mu_2$

$H_1: \mu < 0$, czyli $\mu_1 < \mu_2$

Obliczamy statystykę z :

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

H_0 przyjmujemy lub odrzucamy na podstawie oceny statystyki z , przeprowadzonej analogicznie jak w teście z dla jednej zmiennej.

Do zrobienia:

Czy dwie próbki mogą pochodzić z populacji o takich samych średnich, jeżeli odchylenia standardowe populacji wynoszą odpowiednio: $\sigma_1=2$ i $\sigma_2=3$.

Próba 1	7	8	9	4	12	
Próba 2	4	5	6	5	4	6

Przeanalizuj różne hipotezy alternatywne dla $\alpha=0,05$.

Test t dla dwóch niezależnych prób.

Założenia:

- próby są pobierane losowo,
- populacje z których pobieramy próby podlegają rozkładowi normalnemu,
- wariancje populacji są równe ($\sigma_1^2=\sigma_2^2$).

Przypadek równej liczebności prób ($N_1=N_2$)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu \neq 0 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}} \quad \text{lub} \quad t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_{\bar{X}_1}^2 + s_{\bar{X}_2}^2}}$$

Czy dwie próby mogą pochodzić z populacji o takich samych średnich?

Próba 1	11	1	0	2	0
Próba 2	11	11	5	8	4

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= 2,8 & s_1^2 &= 21,7 & t &= \frac{2,8 - 7,8}{\sqrt{\frac{21,7}{5} + \frac{10,7}{5}}} = -1,9642 \\ \bar{X}_2 &= 7,8 & s_2^2 &= 10,7\end{aligned}$$

Wartość graniczną t_α dla $df=N_1+N_2-2$ stopni swobody odczytujemy z tablic.

Dla testu dwustronnego $\alpha=0,05$ i $df=8$ $t_\alpha=2,306$.

Jaka decyzja?

Przypadek różnej liczebności prób ($N_1 \neq N_2$).

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu \neq 0 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1) \cdot s_1^2 + (N_2 - 1) \cdot s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$

Do zrobienia:

Czy dwie próbki mogą pochodzić z populacji o takich samych średnich. Załóż, że wariancje populacji są równe.

Próba 1	7	8	9	4	12	
Próba 2	4	5	6	5	3	7

Przeanalizuj różne hipotezy alternatywne dla $\alpha=0,05$.

Test t dla dwóch niezależnych prób.

(przypadek nierównych wariancji)

Założenia:

- próby są pobierane losowo,
- populacje z których pobieramy próby podlegają rozkładowi normalnemu,
- wariancje populacji nie są równe ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

Liczebności prób N_1 i N_2 :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu \neq 0 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}} \quad \text{lub} \quad t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_{\bar{X}_1}^2 + s_{\bar{X}_2}^2}}$$

Są różne metody określania granicznej wartości t_α (dają różne wyniki!).

Metoda Cochran-Coxa (opisana w podręczniku) jest bardziej zachowawcza, czyli trudniej jest odrzucić H_0 .

$$t_{\text{krytyczne}} = \frac{t_{\alpha_1} \cdot \frac{s_1^2}{N_1} + t_{\alpha_2} \cdot \frac{s_2^2}{N_2}}{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}} = \frac{t_{\alpha_1} \cdot s_{\bar{X}_1}^2 + t_{\alpha_2} \cdot s_{\bar{X}_2}^2}{s_{\bar{X}_1}^2 + s_{\bar{X}_2}^2}$$

Czy dwie próbki mogą pochodzić z populacji o takich samych średnich?

Próba 1	7	9	13	5	11	
Próba 2	5	5	5	4	5	6

$$N_1 = 5 \quad N_2 = 6 \quad \bar{X}_1 = 9 \quad \bar{X}_2 = 5 \quad s_{\bar{X}_1}^2 = 2,0000 \quad s_{\bar{X}_2}^2 = 0,0667$$

$$t = \frac{9 - 5}{\sqrt{2 + 0,0667}} = 2,7824$$

Jaka decyzja?

Test t dla dwóch prób zależnych.

Założenia:

- próby są pobierane losowo,
- z założenia mają taką samą liczebność,
- dwukrotnie badamy ten sam element,
- populacje z których pobieramy próby podlegają rozkładowi normalnemu,
- wariancje populacji są równe ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$).

Liczebności prób N :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu \neq 0 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{lub} \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

Czy dwie populacje reprezentowane przez dwie próby
zależne mają takie same średnie?

Czy $\mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$?

	X_1	X_2	D	D^2
1	9	8	1	1
2	2	2	0	0
3	1	3	-2	4
4	4	2	2	4
5	6	3	3	9
6	4	0	4	16
7	7	4	3	9
8	8	5	3	9
9	5	4	1	1
10	1	0	1	1

Należy zrobić test t dla jednej
zmiennej, czy próba (reprezentowana
przez różnice) może pochodzić z
populacji o średniej $\mu=0$.

Można również stawiać inną H_0 ,
np. o różnicy między średnimi ($\mu=a$).

Analiza wariancji (ANOVA)

Założenia:

- próby są pobierane losowo,
- populacje z których pobieramy próby podlegają rozkładowi normalnemu,
- wariancje populacji są równe ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_{n-1}^2 = \sigma_n^2$).

Pobieramy kilka próbek (z różnych populacji).

- Czy mogły być pobrane z populacji o takich samych średnich lub, że zostały pobrane z tej samej populacji?
- Czy różnice między nimi są statystycznie istotne?
- Czy zróżnicowanie między grupami jest nie większe niż wewnątrz grup?

H_0 : średnie z populacji z których pobrano próbki są sobie równe.

H_1 : średnie z populacji z których pobrano próbki nie są sobie równe,
różnice pomiędzy grupami są istotne statystycznie.

Pobrano sześć próbek , po 4 elementy każda.

Obliczamy:

- liczby stopni swobody
- wartości średnie
- sumy kwadratów odchyłeń

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	całość
1	10	15	16	12	28	11	
2	7	12	13	12	23	9	
3	8	13	10	18	17	14	
4	7	12	9	14	20	2	Σ
ΣX_i	32	52	48	56	88	36	312
ΣX_i^2	262	682	606	808	2002	402	4762
$N_i =$	4	4	4	4	4	4	
$df_i =$	3	3	3	3	3	3	
średnia	8	13	12	14	22	9	13
$SKO_i =$	6	6	30	24	66	78	210
							706

Średnia dla wszystkich N=24 pomiarów wynosi: $\bar{X} = 13$

	SKO	df	wariancja	
całkowita	706	23		
wewnątrzgrupowa	210	18	11,6667	S_w^2
międzygrupowa	496	5	99,2	S_m^2

Obliczamy statystykę F:
$$F = \frac{S_m^2}{S_w^2} = \frac{99,20}{11,67} = 8,503$$

Założony poziom istotności $\alpha=0,05$

stopnie swobody: $df_m=5$ $df_w=18$

Z tablic odczytujemy wartość graniczną,
tablice są dla rozkładu jednostronnego.

$$F_{graniczna} = F_{\alpha; df_m; df_w} = F_{0,05; 5; 18} = 2,773$$

- porównujemy wartość statystyki z wartością graniczną,
- jeżeli $F < F_{graniczna}$ to H_0 przyjmujemy,
- jeżeli odrzucamy H_0 i przyjmujemy H_1 to szacujemy błąd I rodzaju.

$$F > F_{graniczna} \Rightarrow H_0 \text{ odrzucamy}$$

$$\text{przyjmujemy } H_1$$

$$F_{0,025; 5; 18} = 3,382$$

$$F > 3,382 \Rightarrow \text{błąd I rodzaju } p < 0,025.$$

- Pobrane próbki nie pochodzą z populacji o takich samych średnich.
- Wartości średnie populacji z których pobrano próbki nie są równe.
- Próbki nie były pobrane z tej samej populacji.

Pobrano cztery próbki.

Czy różnice między nimi są statystycznie istotne?

Czy różnice pomiędzy wartościami średnimi są istotne statystycznie?

Czy wartości średnie w populacjach z których pobrano próby są sobie równe?

H_0 : zróżnicowanie między grupami jest nie większe niż wewnątrz grup.

H_1 : pomiędzy grupami różnice są istotne statystycznie.

	GRUPA 1	GRUPA 2	GRUPA 3	GRUPA 4
1	105	105	103	109
2	106	105	103	104
3	114	106	107	103
4	106	109	101	108
5	115	108	108	104
6	108	106	104	102
7	108	102	103	109
8	112	106	101	106
9	107	107	109	102

Dla całej populacji (36 próbek):

$$\bar{X} = 106,14 \quad s^2 = 11,09 \quad \sum (X_i - \bar{X})^2 = 388,31$$

Dla każdej z grup obliczamy:
średnią, wariancję i sumę kwadratów odchyłeń:

	GRUPA 1	GRUPA 2	GRUPA 3	GRUPA 4		
df_i	8	8	8	8		
średnia	109,00	106,00	104,33	105,22	wariancja	4,1019
wariancja	13,75	4,00	8,75	8,19	Σ	
SKO	110,00	32,00	70,00	65,56	277,56	

Wewnątrzgrupowa suma kwadratów odchyłeń – SKO dla grup

Wewnątrzgrupowa liczba stopni swobody – suma **df** dla grup

Wewnątrzgrupowe oszacowanie wariancji –

$$\text{iloraz (SKO / stopnie swobody)} \quad s_w^2 = \frac{277,56}{32} = 8,67$$

Międzygrupowe oszacowanie wariancji

– wariancja obliczona na podstawie zmienności między grupami.

$$s_m^2 = \frac{388,31 - 277,56}{3} = \frac{110,75}{3} = 36,92$$

ale też $s_m^2 = 4,10 \cdot 9 = 36,92$

Pomiędzy obliczanymi SKO (były trzy różne)

zachodzi następujący związek:

Ogólna SKO = międzygrupowa SKO + wewnątrzgrupowa SKO

F = wariancja międzygrupowa/wariancja wewnątrz grup

$$\text{Statystyka} \quad F = \frac{36,92}{8,67} = 4,26 \quad \text{wartość graniczna} \quad F_{0,05,3,32} \approx 2,9$$

Ponieważ statystyka **F>2,9** to hipotezę o braku różnic pomiędzy grupami należy odrzucić.

Błąd I rodzaju = ?

Test a posteriori Tukeya (post-hoc, niezaplanowane)

Wiemy, że pomiędzy grupami występują różnice istotne statystycznie, nie wiemy jednak **różnice pomiędzy którymi grupami** są za to odpowiedzialne.

Różne nazwy testu:

- najmniejsza istotna różnica (**NIR**),
- rozsądna i. r. (**RIR**).

$$NIR = Q_{krytyczne} \cdot s_x \quad s_x = \sqrt{\frac{s_{wewn.}^2}{n}} \quad s_x = \sqrt{\frac{8,67}{9}} = 0,981$$

Q – rozstęp studentyzowany (wartości z tablic).

n=9 – liczba powtórzeń w grupie,

dla **N=4** grup i **df=32** stopni swobody **Q_{0,05;4;32} = 3,83**

$$NIR = 3,83 \cdot 0,981 = 3,757$$

H₀ - brak różnic pomiędzy średnimi, odrzucamy gdy
różnica pomiędzy średnimi porównywanych grup
jest większa od NIR.

H₁ - różnica pomiędzy grupami jest istotna statystycznie.

Różnice pomiędzy średnimi, zaznaczono wartości większe od NIR.

Bierzemy pod uwagę wartość bezwzględną różnicy!

	GRUPA 1	GRUPA 2	GRUPA 3	GRUPA 4
GRUPA 1	0	3,00	4,67	3,78
GRUPA 2		0	1,67	0,78
GRUPA 3			0	-0,89
GRUPA 4				0

1. Dane do zadania z analizy wariancji:

G1	23	28	42								
G2	30	26	42	32	40						
G3	36	39	42	45	48	42	42				
G4	34	31	40	37	44	48					
G5	35	61	35	53							
G6	47	56	50	52	58	43	36	33	45	40	

Należy postawić H_0 i H_1 , obliczenia wykonać dla założonego α .

Uwaga: w tym zadaniu nie robimy testów *a posteriori*.

2. Proszę zbadać testem Tukeya różnice pomiędzy którymi grupami są istotne statystycznie.

Analiza wariancji była już zrobiona na zajęciach.

Należy postawić H_0 i H_1 , obliczenia wykonać dla założonego α .

	G1	G2	G3	G4	G5	G6
1	10	15	16	12	28	11
2	7	12	13	12	23	9
3	8	13	10	18	17	14
4	7	12	9	14	20	2

Skala porządkowa – tabele decyzyjne.

Pytania na które trzeba sobie odpowiedzieć:

(są w zasadzie identyczne jak dla danych w skali interwałowej)

- Co chcemy sprawdzić? /np. mediana, rozkład itp./
- Test dla 1, 2 czy większej liczby próbek.
- Co wiemy o populacji (lub populacjach) z których dokonujemy losowania?
- Jakie założenia możemy przyjąć (wynika z poprzedniego)?
- Jakiego rodzaju danymi dysponujemy (skale pomiarowe)?

Dane w skali interwałowej lub porządkowej

ale test jest oparty o skalę porządkową

(zmienne zależne lub niezależne).

Jedna próba.

Hipoteza o medianie:

- dane: skala interwałowa- test Wilcoxona,

Hipoteza o innych parametrach (np. rozkład):

- test Kołmogorowa-Smirnowa o zgodności z rozkładem dla jednej zmiennej,

Dwie próby.

Hipoteza o różnicy pomiędzy medianami dwóch niezależnych populacji:

- test U Manna-Whitneya,

Hipoteza o różnicy pomiędzy rozkładami dwóch niezależnych populacji:

- test Kołmogorowa-Smirnowa o zgodności z rozkładów dwóch niezależnych populacji,

Hipoteza o różnicach pomiędzy dwoma zależnymi populacjami:

- test Wilcoxona dla dwóch zależnych prób (test dla par wiązanych),

Dwie lub więcej prób.

Hipoteza o różnicy pomiędzy medianami dwóch lub więcej niezależnych populacji:

- jednoczynnikowa analiza wariancji Kruskala - Wallisa dla rang.

Test Wilcoxona dla jednej próby.

- Chcemy zbadać czy próba została (lub nie) otrzymana z populacji o medianie θ_0 .
- Dane zostały otrzymane z populacji w sposób losowy.
- Oryginalne dane są w skali interwałowej.
- Populacja ma rozkład symetryczny.
- Jeżeli rezultat testu **Wilcoxona** dla jednej próby wykaże znaczącą różnicę to należy stwierdzić, że jest wysoce prawdopodobne iż próbka pochodzi z populacji o medianie innej niż θ_0 .

Czy próba:

9, 10, 8, 4, 8, 3, 0, 10, 15, 9

może pochodzić z populacji o medianie $\Theta=5$?

Hipoteza zerowa: $H_0: \Theta = 5$ ($\Sigma R_+ = \Sigma R_-$)

Hipotezy alternatywne (można postawić tylko jedną):

$H_1: \Theta \neq 5$ test dwustronny,

hipoteza alternatywna nieukierunkowana ($\Sigma R_+ \neq \Sigma R_-$),

$H_1: \Theta > 5$ test jednostronny,

ukierunkowana hipoteza alternatywna ($\Sigma R_+ > \Sigma R_-$),

$H_1: \Theta < 5$ test jednostronny,

ukierunkowana hipoteza alternatywna ($\Sigma R_+ < \Sigma R_-$)

c	X_i	$D=X_i - \Theta$	$R D $	$R D $ ze znakiem
1	9	4	5,5	5,5
2	10	5	8	8
3	8	3	3,5	3,5
4	4	-1	1	-1
5	8	3	3,5	3,5
6	3	-2	2	-2
7	0	-5	8	-8
8	10	5	8	8
9	15	10	10	10
10	9	4	5,5	5,5

$$\Sigma R_+ = 44 \quad \Sigma R_- = 11 \quad \Sigma R_+ + \Sigma R_- = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

Statystyka $T=11$, dla testu dwustronnego ($H_0: \Theta = 5$ i $H_1: \Theta \neq 5$).

Odczytana z tablic wartość graniczna $T_{0,05}=8$.

Wniosek?

Przybliżenie rozkładem normalnym.

$$Z = \frac{T - \frac{N \cdot (N+1)}{4}}{\sqrt{\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2 \cdot N + 1)}{24}}}$$

$$Z = \frac{11 - \frac{10 \cdot 11}{4}}{\sqrt{\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{24}}} = \frac{-16,5}{9,8107} = -1,682 \approx -1,68$$

Test dwustronny $\Phi(1,68)=?$

błąd I rodzaju $p=?$

Decyzja ?

Dla $N=10$ i $T_{\text{krytyczne}}=8$

$$Z = \frac{8 - \frac{10 \cdot 11}{4}}{\sqrt{\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{24}}} = \frac{-19,5}{9,8107} = -1,988$$

Zadanie:

Czy próba $N=13$

16	15	13	24	35	14	33	28	31	47	29	56	19
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

może pochodzić z populacji o medianie $\Theta = 18$?

Sprawdź dla testu dwustronnego i poziomu istotności $\alpha=0,05$.

Test zgodności **Kolmogorowa-Smirnowa** dla jednej zmiennej.

- Chcemy zbadać czy próba została (lub nie) otrzymana z populacji o zadanym rozkładzie.
- Dane zostały otrzymane z populacji w sposób losowy.
- Oryginalne dane są w skali interwałowej.

Jeżeli rezultat testu **Kolmogorowa-Smirnowa** dla jednej zmiennej wykaże znaczącą różnicę to należy stwierdzić, że jest wysoce prawdopodobne iż próbka pochodzi z populacji o rozkładzie innym niż oczekiwany.

$H_0: F(X) = F_0(X)$ (dystrybuanta jest zgodna z założoną)

$H_1: F(X) \neq F_0(X)$ (dystrybuanta nie jest zgodna z założoną)

Czy przykładowe wyniki kolokwium podlegają rozkładowi normalnemu?

$$N = 100 \quad \bar{X} = 5,00 \quad s^2 = 8,384 \quad s = 2,895$$

Parametry rozkładu normalnego: $\mu = 5,00 \quad \sigma = 2,895 \quad Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$

punkty X_i	N_i	skumulowane	Z_i	$\Phi(Z_i)$	$P_i = N_{sk.}/N$	$D = \Phi(Z_i) - P_i $
0	8	8	-1,7268	0,0421	0,08	0,0379
1	5	13	-1,3815	0,0836	0,13	0,0464
2	5	18	-1,0361	0,1501	0,18	0,0299
3	7	25	-0,6907	0,2449	0,25	0,0051
4	23	48	-0,3454	0,3649	0,48	0,1151
5	18	66	0	0,5	0,66	0,1600
6	7	73	0,3454	0,6351	0,73	0,0949
7	5	78	0,6907	0,7551	0,78	0,0249
8	6	84	1,0361	0,8499	0,84	0,0099
9	3	87	1,3815	0,9164	0,87	0,0464
10	13	100	1,7268	0,9579	1	0,0421

Największa różnica (moduł) **D=0,160**.

Dla $N \geq 30$ wartości graniczne dla testu dwustronnego:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0,05 & D_{0,05} = \frac{1,36}{\sqrt{N}} & D_{0,05} = 0,136 \\ \alpha = 0,02 & D_{0,02} = \frac{1,52}{\sqrt{N}} & D_{0,02} = 0,152 \\ \alpha = 0,01 & D_{0,01} = \frac{1,63}{\sqrt{N}} & D_{0,01} = 0,163 \end{array}$$

H_0 : odrzucamy gdy $D \geq D_{0,05}$

Wniosek?

Zadanie:

W grupie $N=30$ osób przeprowadzono kolokwium. Dla poziomu istotności $\alpha=0,05$ sprawdź czy wyniki kolokwium podlegają rozkładowi normalnemu.

uzyskane punkty	liczba osób
X_i	N_i
0	5
1	2
2	3
3	9
4	1
5	0
6	3
7	1
8	1
9	2
10	3

Test U (Manna-Whitneya)

– różnice pomiędzy medianami dwóch populacji.

- Chcemy zbadać czy dwie próby zostały (lub nie) otrzymane z populacji o równych medianach.
- Dane zostały otrzymane z populacji w sposób losowy.
- Oryginalne dane są w skali porządkowej (lub interwałowej).

Jeżeli rezultat testu **Manna-Whitneya** wykaże znaczącą różnicę to należy stwierdzić, że jest wysoce prawdopodobne iż próbki pochodzą z populacji o różnych medianach.

$H_0: \Theta_1 = \Theta_2$ (populacje nie różnią się medianami)

$H_1: \Theta_1 \neq \Theta_2$ (mediany populacji są różne)

Możliwe są też $H_1: \Theta_1 > \Theta_2$ lub $H_1: \Theta_1 < \Theta_2$

Czy dwie próby niezależne mogą pochodzić z populacji o jednakowych medianach?

GRUPA 1		GRUPA 2	
X_i	R_i	X_i	R_i
11	9	11	9
1	3	11	9
0	1,5	5	6
2	4	8	7
0	1,5	4	5

Zamieniamy skalę interwałową na porządkową,
dwie grupy traktujemy łącznie.

Dla każdej z grup obliczamy sumę rang:

$$\Sigma R_1 = 19 \quad \Sigma R_2 = 36$$

Obliczmy statystyki:

$$U_1 = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_1(N_1 + 1)}{2} - \sum R_1 \quad U_2 = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_2(N_2 + 1)}{2} - \sum R_2$$

$$U_1 = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot (5 + 1)}{2} - 19 = 21 \quad U_2 = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot (5 + 1)}{2} - 36 = 4$$

Wybieramy mniejszą: **U=4** . Wartość graniczna
 odczytana z tablic dla $\alpha=0,05$ i testu dwustronnego
 $U_{0,05}=2$.

H₀: odrzucamy gdy $U \leq U_{\alpha}$

Wniosek?

Zadanie:

Czy dwie próby mogły zostać pobrane z tej samej populacji?

GRUPA 1	45	47	89	34	37	112	88	67	156	98	106	82	145
GRUPA 2	35	56	36	79	48	38							

Test przeprowadź dla poziomu istotności $\alpha=0,05$.

Test Kolmogorowa-Smirnowa

- Chcemy zbadać czy próby zostały (lub nie) otrzymane z populacji o takich samych rozkładach.
- Dane zostały otrzymane z populacji w sposób losowy.
- Oryginalne dane są w skali interwałowej.

Jeżeli rezultat testu **Kolmogorowa-Smirnowa** wykaże znaczącą różnicę to należy stwierdzić, że jest wysoce prawdopodobne iż próbki pochodzą z populacji o różnych rozkładach.

- dane z dużą liczbą rang wiązanych
- np. dane w postaci szeregów rozdzielczych, rozkładów liczebności itp.

H_0 : próby pochodzą z populacji o takim samym rozkładzie

H_1 : populacje z których pobrano próby mają różne rozkłady

Wyniki I i II kolokwium z matematyki. Porównujemy wyniki dla całego roku, kolokwia pisało odpowiednio 130 i 127 osób.

Uwaga: studentów I roku traktujemy jako próbę z wszystkich którzy kiedykolwiek pisali takie kolokwia.

H_0 : pomiędzy wynikami nie ma różnic istotnie statystycznych
(dystribuanty nie różnią się)

H_1 : rozkład punktów jest inny w każdym z kolokwiów
(dystribuanty różnią się)

(kolokwia różnią się średnią liczbą punktów?)

$$H_0: F_1(X) = F_2(X)$$

$$H_1: F_1(X) \neq F_2(X)$$

Sposób przeprowadzenia obliczeń:

- obliczamy liczebności skumulowane
- obliczamy frekwencje skumulowane
- wyliczamy różnice pomiędzy frekwencjami skumulowanymi obydwu grup (Δ)
- wyznaczamy wartości bezwzględne tych różnic - $|\Delta|$
- znajdujemy największą wartość $|\Delta|$

punkty	osoby		skumul.		frekw.		Δ	$ \Delta $
	I	II	I	II	I	II	I-II	I-II
0	25	19	25	19	0,192	0,150	0,043	0,043
1	20	11	45	30	0,346	0,236	0,110	0,110
2	14	21	59	51	0,454	0,402	0,052	0,052
3	23	20	82	71	0,631	0,559	0,072	0,072
4	13	15	95	86	0,731	0,677	0,054	0,054
5	11	11	106	97	0,815	0,764	0,052	0,052
6	8	6	114	103	0,877	0,811	0,066	0,066
7	7	8	121	111	0,931	0,874	0,057	0,057
8	5	8	126	119	0,969	0,937	0,032	0,032
9	3	5	129	124	0,992	0,976	0,016	0,016
10	1	3	130	127	1	1	0	0
suma	130	127					MAX=	0,110

- Wyznaczamy największą wartość $|\Delta|$ - statystyka $D = |\Delta| = 0,110$
- Obliczamy (wyznaczamy) wartość krytyczną D_{α} , dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ i dużych liczebności prób (jedna ma co najmniej 40, lub każda powyżej 26) według wzoru:

$$D_{0,05} = 1,36 \cdot \sqrt{\frac{N_I + N_{II}}{N_I \cdot N_{II}}}$$

$$D_{0,05} = 1,36 \cdot \sqrt{\frac{130 + 127}{130 \cdot 127}} = 0,170$$

$D < D_{0,05} \Rightarrow$ przyjmujemy H_0

Dla innych poziomów istotności stosujemy współczynniki:

$$\alpha = \begin{matrix} 0,10 & 0,05 & 0,01 & 0,001 \\ 1,22 & 1,36 & 1,63 & 1,95 \end{matrix}$$

Zadanie:

Z dwóch populacji generalnych pobrano próbki. Za pomocą testu Kołmogorowa-Smirnowa, na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ sprawdź H_0 , że między rozkładami populacji generalnych, z których pobrano te dwie próby, nie ma różnic.

wartość	5	6	7	8	9
Grupa A	12	23	10	4	2
Grupa B	4	12	19	3	3

Test Kruskala-Wallisa (ANOVA rang)

H_0 : pomiędzy grupami nie ma różnicowania.

H_1 : pomiędzy grupami występuje różnicowanie istotne statystycznie.

$$H_0: \Theta_1 = \Theta_2 = \dots = \Theta_{n-1} = \Theta_n$$

H_1 : co najmniej dwie grupy różnią się medianami

Dane z przykładu dla analizy wariancji są przedstawione w skali porządkowej, przypisane zostały im rangi. Należy pamiętać o rangach wiązanych!

	GRUPA 1	GRUPA 2	GRUPA 3	GRUPA 4
1	105	105	103	109
2	106	105	103	104
3	114	106	107	103
4	106	109	101	108
5	115	108	108	104
6	108	106	104	102
7	108	102	103	109
8	112	106	101	106
9	107	107	109	102

	GRUPA 1	GRUPA 2	GRUPA 3	GRUPA 4
1	14	14	7,5	31,5
2	18,5	14	7,5	11
3	35	18,5	23	7,5
4	18,5	31,5	1,5	27
5	36	27	27	11
6	27	18,5	11	4
7	27	4	7,5	31,5
8	34	18,5	1,5	18,5
9	23	23	31,5	4
suma rang R_i	233	169	118	146

Statystyka:
$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_j \frac{R_j^2}{N_j} - 3 \cdot (N+1)$$

$$H = \frac{12}{36 \cdot 37} \cdot \left(\frac{233^2}{9} + \frac{169^2}{9} + \frac{118^2}{9} + \frac{146^2}{9} \right) - 3 \cdot 37 = 7,2082$$

W układzie występują rangi wiązane, należy obliczyć poprawkę:

$$D = 1 - \frac{\sum (t^3 - t)}{N^3 - N}$$

t – liczba pomiarów mająca taką samą rangę, np.

$$t = 3 \quad t^3 - t = 24 \quad t = 5 \quad t^3 - t = 120$$

$$D = 1 - \frac{1}{36^3 - 36} \cdot (6 + 24 + 60 + 24 + 24 + 210 + 24 + 120 + 60) =$$

$$= 1 - \frac{552}{36^3 - 36} = 0,9882$$

Poprawione: $H = \frac{H}{D} = \frac{7,2082}{0,9882} = 7,2946$

porównujemy z wartością graniczną z testu χ^2

dla $\alpha=0,05$ i $df=4-1=3$ stopni swobody: $\chi_{0,05;3}^2 = 7,815$

Ponieważ $H < 7,815$ to hipotezę zerową należy przyjąć.

Inaczej niż w przypadku analizy wariancji!

Z pięciu populacji generalnych pobrano próbki. Za pomocą testu Kruskala-Wallisa, na poziomie istotności $\alpha=0,05$ sprawdź hipotezę zerową, że między grupami, z których pobrano te pięć prób, nie ma różnic w nasileniu badanej cechy.

A	B	C	D	E
24	26	27	31	41
23	35	33	30	45
30	24	59	38	17
	24	72	28	37
		90		30
		34		38
		34		43
		51		

Proszę nie zapomnieć o rangach wiązanych.

Metoda najmniejszych kwadratów – regresja liniowa analiza zależności, test F

Testujemy H_0 : współczynniki korelacji i regresji są równe zero czyli, że pomiędzy zmiennymi X i Y nie ma zależności.

$$\begin{aligned}\sum x^2 &= \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N} \quad - \text{SKO dla zmiennej } X \\ \sum y^2 &= \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{N} \quad - \text{SKO dla zmiennej } Y \\ \sum xy &= \sum (X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i \cdot Y_i - \frac{\sum X_i \cdot \sum Y_i}{N}\end{aligned}$$

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N-1} = \frac{SKO}{df} \quad - \text{wariancja}$$

Nachylenie prostej w metodzie najmniejszych kwadratów:

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N Y_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N Y_i}{N}}{\sum_{i=1}^N X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2}{N}} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

Uwaga: gdyby zamienić zmienne X i Y to: $a' = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$

Może być regresja:

Y względem **X** lub

X względem **Y**.

Współczynnik korelacji Pearsona (miara jakości dopasowania):

$$r^2 = \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2 \cdot \sum y^2} = a \cdot a'$$

wariancja wyjaśniona = wyjaśniona SKO / st. swobody(df=1)

wariancja niewyjaśniona = niewyjaśniona SKO / st. swobody(df=N-2)

SKO= SKO wyjaśniona + SKO niewyjaśniona

$$\sum y^2 = \sum y_p^2 + \sum d^2$$

$$\begin{aligned} \sum y_p^2 &= \sum \left((a \cdot \bar{X} + b) - (a \cdot X_i + b) \right)^2 = \sum \left(a \cdot (\bar{X} - X_i) \right)^2 = \\ &= \sum (a \cdot x)^2 = a^2 \sum x^2 = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right)^2 \sum x^2 = \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2} = \\ &= \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2} \cdot \frac{\sum y^2}{\sum y^2} = r^2 \cdot \sum y^2 \end{aligned}$$

$$\sum y_p^2 = r^2 \sum y^2 \quad s_p^2 = \frac{\sum y_p^2}{df_p} \quad df_p = 1$$

$$\sum d^2 = (1 - r^2) \sum y^2 \quad s_d^2 = \frac{\sum d^2}{df_d} \quad df_d = N - 2$$

statystyka F: $F = \frac{s_p^2}{s_d^2} \quad F = \frac{r^2(N-2)}{1-r^2}$

Jeżeli $F > F_{\alpha,1,N-2}$

to hipotezę o braku zależności należy odrzucić,
czyli przyjąć hipotezę alternatywną,
że istnieje zależność liniowa pomiędzy **X** i **Y**.

H₀: ρ²=0

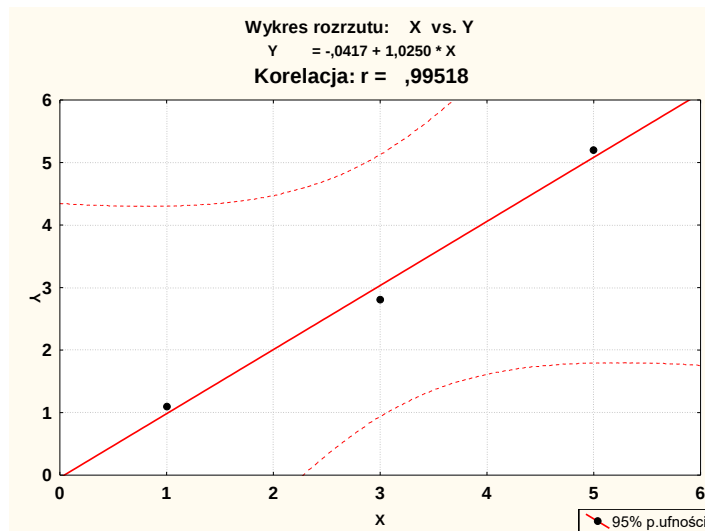
współczynnik korelacji (i regresji) jest równy zero,
pomiędzy zmiennymi brak jest zależności liniowej,
dane ułożone są w sposób przypadkowy.

H₁: ρ²>0

współczynnik korelacji (i regresji) jest różny od zera,
pomiędzy zmiennymi występuje zależność liniowa
zależność jest istotna statystycznie.

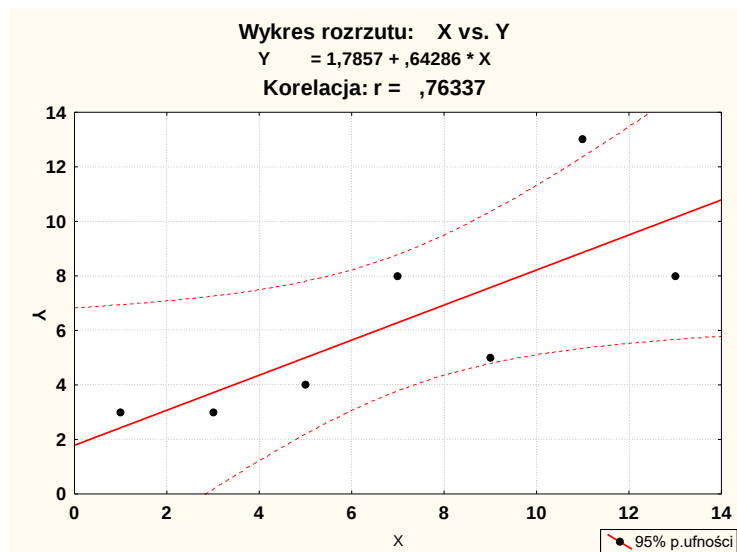
X	Y
1	1,1
3	2,8
5	5,2

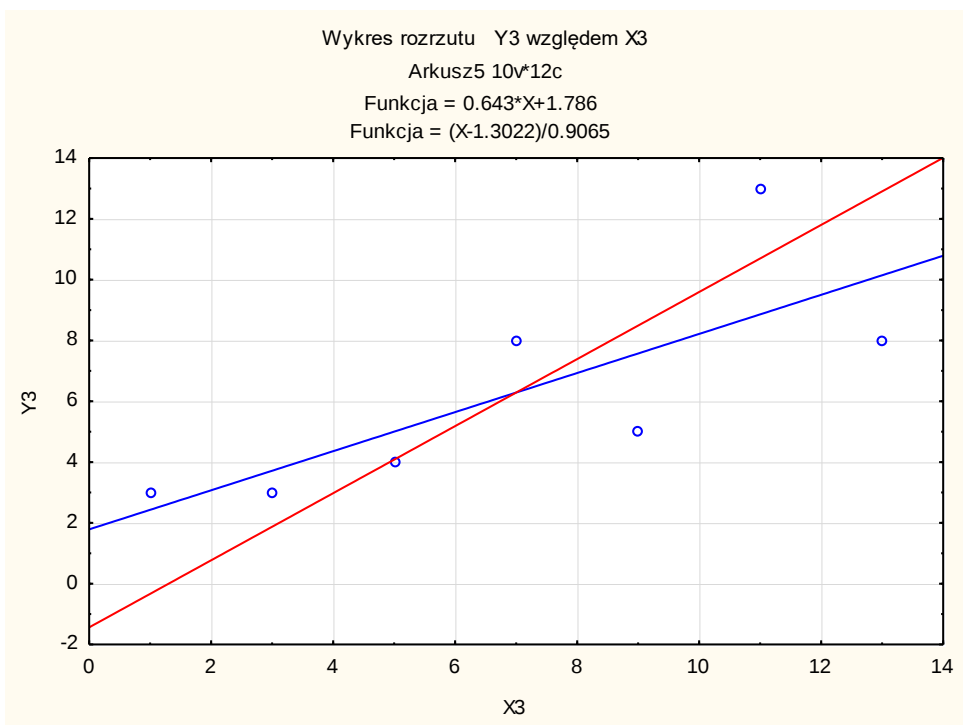
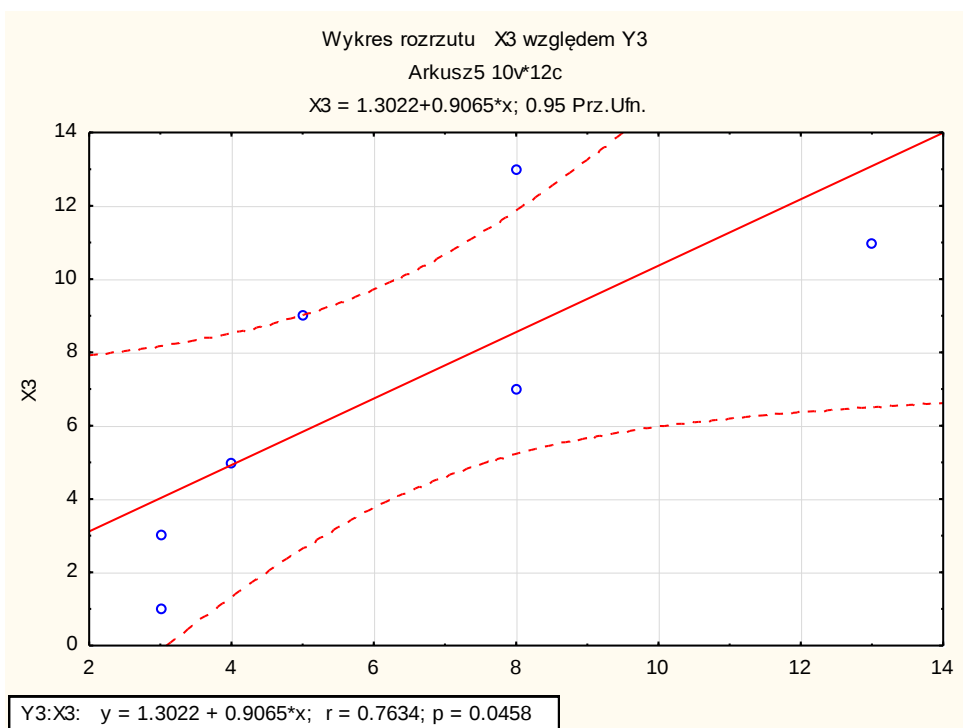
$r=0,9952$
 $p=0,063$



X	Y
1	3
3	3
5	4
7	8
9	5
11	13
13	8

$r=0,7634$
 $p=0,046$





Nieparametryczna alternatywa współczynnika korelacji- współczynnik korelacji Spearmana

Czy pomiędzy zmiennymi **X** i **Y** jest związek statystycznie istotny (niekoniecznie liniowy, monotoniczny), czy pomiędzy dwoma populacjami reprezentowanymi przez próby jest istotna statystycznie relacja monotoniczna?

$$H_0: \rho_s = 0$$

$$H_1: \rho_s > 0 \text{ (lub } \rho_s < 0)$$

Dane nie muszą być w skali interwałowej, wystarczy porządkowa.

Każdej wartości **X_i** i **Y_i** przypisujemy rangi (każdej zmiennej z osobna). Dla każdej pary punktów wyznaczamy kwadrat różnicy rang i sumujemy je (**ΣD²**).

$$D_i^2 = (R_{X_i} - R_{Y_i})^2$$

Obliczamy współczynnik korelacji Spearmana

r_s – miara jakości związku:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum D^2}{N \cdot (N^2 - 1)}$$

Sprawdzenie istotności statystycznej:

Jeżeli **N > 10** obliczamy statystykę **t** i porównujemy $t = \frac{r_s \cdot \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$ z wartością graniczną dla rozkładu **t**.

Dla większych prób obliczamy statystykę **Z** i porównujemy z wartością graniczną dla rozkładu normalnego.

$$Z = r_s \cdot \sqrt{N-1}$$

													SUMA	średnia
X	-3	-1	1	2	3	4	5	6	8	10	11	14	60	5
Y	-1	-4	2	4	17	34	14	35	9	8	47	27	192	16
x	-8	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	3	5	6	9	0	
y	-17	-20	-14	-12	1	18	-2	19	-7	-8	31	11	0	
xy	136	120	56	36	-2	-18	0	19	-21	-40	186	99	571	
xx	64	36	16	9	4	1	0	1	9	25	36	81	282	
yy	289	400	196	144	1	324	4	361	49	64	961	121	2914	

$$a=2,0248 \quad r^2=0,3968$$

$$\begin{aligned} SKO_{\text{wyjaśn.}} &= 1156,2 & df &= 1 & \text{war wyj} &= 1156,2 \\ SKO_{\text{niewyjaśn.}} &= 1757,8 & df &= 10 & \text{war nwyj} &= 175,78 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{obl}} &= 6,58 & ppodob &= 0,0282 \\ & & ppodob &= 0,05 & F_{\text{gran}} &= 4,96 \end{aligned}$$

$F_{\text{obl}} > F_{\text{graniczne}} \Rightarrow H_0$ odrzucamy.

Kwadraty odchyleń wygodniej jest policzyć z poznanych wzorów na SKO.

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 60 & \sum x^2 &= \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{N} \\ \sum Y_i &= 192 & \sum x^2 &= 582 - \frac{60^2}{12} = 282 \\ \sum X_i^2 &= 582 & \sum y^2 &= \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{N} \\ \sum Y_i^2 &= 5986 & \sum y^2 &= 5986 - \frac{192^2}{12} = 2914 \\ \sum X_i \cdot Y_i &= 1531 & \sum xy &= \sum X_i \cdot Y_i - \frac{\sum X_i \cdot \sum Y_i}{N} \\ & & \sum xy &= 1531 - \frac{60 \cdot 192}{12} = 571 \end{aligned}$$

Rangi R_x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Rangi R_y	2	1	3	4	8	10	7	11	6	5	12	9	
D	-1	1	0	0	-3	-4	0	-3	3	5	-1	3	SUMA
D ²	1	1	0	0	9	16	0	9	9	25	1	9	80

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum D^2}{N \cdot (N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 80}{12 \cdot 143} = 0,7203$$

$$t = \frac{r_s \cdot \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} = \frac{0,7203 \cdot \sqrt{12-2}}{\sqrt{1-0,7203^2}} = 3,2837$$

Dla oszacowania błędu I rodzaju korzystamy z tablic rozkładu **t**.

Decyzja? (wartość dokładna: $p=0,004$)

$$Z = r_s \cdot \sqrt{N-1} = 0,7203 \cdot \sqrt{11} = 2,3889$$

Dla jednostronnego rozkładu normalnego dla **Z=2,3889**
prawdopodobieństwo **p=0,0084**, czyli **H₀** – odrzucamy,
błąd I rodzaju - 0,0084.

Metodą najmniejszych kwadratów oblicz współczynnik nachylenia prostej regresji (**a**) dla 12 par danych doświadczalnych **X** i **Y**, wartości **X_i** i **Y_i** przedstawiono w tabeli. Oblicz współczynnik korelacji Pearsona oraz za pomocą testu **F** sprawdź hipotezę zerową, że parametryczne współczynniki regresji i korelacji (dla populacji) są równe zero.

Oblicz współczynnik korelacji Spearmana, na podstawie tego testu sprawdź hipotezę zerową o braku związku między zmiennymi **X** i **Y**. Dla obydwu testów należy przyjąć poziom istotności jako równy **α=0,05**.

X_i	-7	-5	-3	-2	-1	0	1	3	4	5	7	10
Y_i	2	-1	-4	-12	-6	-2	0	1	10	5	16	3